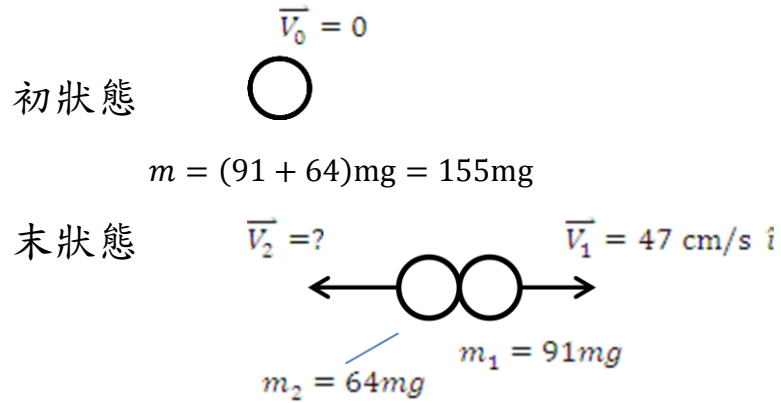


## 第 9 章 質點系統(習題詳解)

10. 一粒靜止不動的爆米花粒在熱鍋上爆成兩塊，質量分別為 91 mg 與 64 mg。  
若較重的一塊以水平速率 47 cm/s 移動，試描述另一塊的運動。

解：



初動量 = 末動量

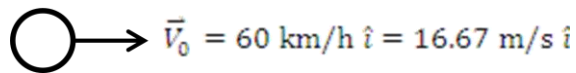
$$\begin{aligned} m\vec{V}_0 &= m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \\ \vec{v}_2 &= -\frac{m_1\vec{v}_1}{m_2} \\ &= -\frac{91\text{ mg} \times 47\text{ cm/s } \hat{i}}{64\text{ mg}} \\ &= -67\text{ cm/s } \hat{i} \end{aligned}$$

11. 一個 150 g 的惡作劇棒球以 60 km/h 的速率投出，在飛行過程中爆炸分成兩個部分，其中一個質量 38 g 持續以 85 km/h 的速率向前移動，求這些破片在爆炸中獲得多少能量？

解：

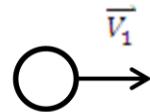
初狀態

$$m = 0.150 \text{ kg}$$



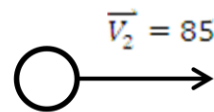
$$\vec{v}_0 = 60 \text{ km/h } \hat{i} = 16.67 \text{ m/s } \hat{i}$$

末狀態



$$\vec{v}_1$$

$$m_1 = 0.112 \text{ kg}$$



$$\vec{v}_2 = 85 \text{ km/h } \hat{i} = 23.61 \text{ m/s } \hat{i}$$

$$m_2 = 0.038 \text{ kg}$$

動量守恆  $m\vec{v}_0 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$

$$\Rightarrow \vec{v}_1 = \frac{m\vec{v}_0 - m_2\vec{v}_2}{m_1} = \frac{0.150 \times 16.67 - 0.038 \times 23.61}{0.112} \text{ m/s } \hat{i}$$

$$= 14.32 \text{ m/s } \hat{i}$$

初動能  $K_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2} \times 0.150 \times 16.67^2 = 20.84 \text{ J}$

末動能  $K = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$

$$= \frac{1}{2} \times 0.112 \times 14.32^2 + \frac{1}{2} \times 0.038 \times 23.61^2 = 22.07 \text{ J}$$

獲得能量  $\Delta K = K - K_0 = 22.07 - 20.84 = 1.23 \text{ J}$

13. 你任職於行星探測之地面指揮中心。某次軌道修正需要發射火箭以提供 5.64 N.s 的衝量，如果火箭的平均推力為 135 mN，則火箭的發射時間應持續多久？

解：

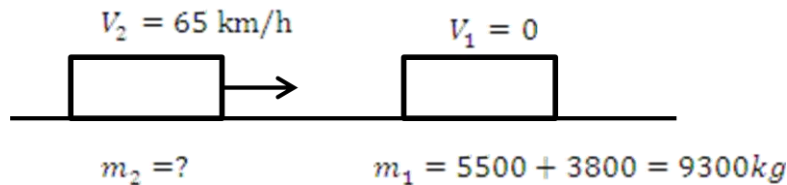
$$J = 5.64 \text{ N} \cdot \text{s} \qquad \bar{F} = 135 \times 10^{-3} \text{ N}$$

$$J = \bar{F} \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{J}{\bar{F}} = \frac{5.64}{135 \times 10^{-3}} \text{ s} = 41.8 \text{ s}$$

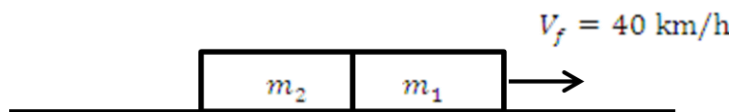
15. 兩輛相同的卡車空車質量為 5500 kg，最大安全負載為 8000 kg。若第一輛卡車靜止且負載 3800 kg，第二輛卡車以車速 65 km/h 撞擊該車，之後合成一體以 40 km/h 的速率移動。身為一位專業的證人，你被問及第二輛卡車是否超載，你的答案為何？

解：

碰撞前：



碰撞後：



動量守恆：
$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_f \quad , \text{ 其中 } v_1 = 0$$

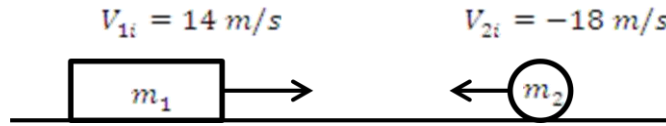
$$\Rightarrow m_2 = \frac{m_1 v_f}{v_2 - v_f} = \frac{9300 \text{ kg} \times 40 \text{ km/h}}{(65 - 40) \text{ km/h}} = 14880 \text{ kg}$$

$$\text{載重} = 14880 - 5500 = 9380 \text{ kg} > 8000 \text{ kg}$$

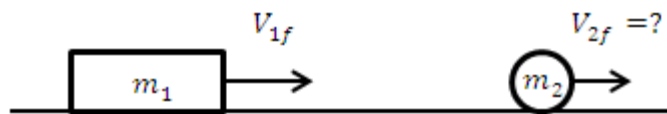
$\therefore$  該車超載 1380 kg

16. 一個幼童在街上玩耍，誤將手中的球以 18 m/s 的速率投向一輛以 14 m/s 的速率迎面而來的汽車，則該球與汽車進行彈性碰撞後其反彈的速率為何？  
解：

碰撞前



碰撞後



$$\text{動量守恆 } m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

$$\text{動能守恆 } \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

解方程組，得

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

$$m_1 \gg m_2$$

$$\therefore v_{2f} \approx 2v_{1i} - v_{2i} = 2 \times (14\text{m/s}) - (-18\text{m/s}) = 46\text{m/s}$$

20. 一輛 11,000 kg 之貨運車停靠在鐵道末端的彈簧緩衝器上，彈簧的力常數為  $k = 0.32 \text{ MN/m}$ 。另一輛質量 9400 kg 之貨運車以 8.5 m/s 的速率撞擊此車，兩車撞擊後連成一體，求 (a) 彈簧最大壓縮量，(b) 兩車從彈簧一起反彈的速率。

解：

$$(a) \quad m_1 = 11000 \text{ kg}, v_{1i} = 0$$

$$m_2 = 9400 \text{ kg}, v_{2i} = 8.5 \text{ m/s}$$

動量守恆  $m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_f$ ，其中  $v_{1i} = 0$

$$\Rightarrow \text{碰撞後末速度 } v_f = \frac{m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} = \frac{9400 \times 8.5}{11000 + 9400} \text{ m/s} = 3.92 \text{ m/s}$$

車子以動能  $\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2$  撞擊彈簧，動能轉成彈簧位能

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2 = \frac{1}{2}kX_{\max}^2$$

$$X_{\max} = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} v_f = \sqrt{\frac{11000 + 9400}{0.32 \times 10^6}} \times 3.92 \text{ m} = 0.99 \text{ m}$$

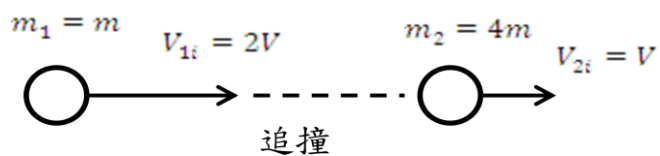
(b)

彈簧將車子反彈，位能再轉換成車子動能

$$\therefore \text{反彈速率 } v_{\text{reb}} = v_f = 3.92 \text{ m/s}$$

24. 一個質量為  $m$  以速率  $2v$  移動的物體，追撞另一質量為  $4m$  速率  $v$  的物體  
進行正面彈性碰撞，求碰撞後兩者的速率各為何？

解：



一維彈性碰撞，參考第 9-6 節討論知

$m_1$  的末速度：

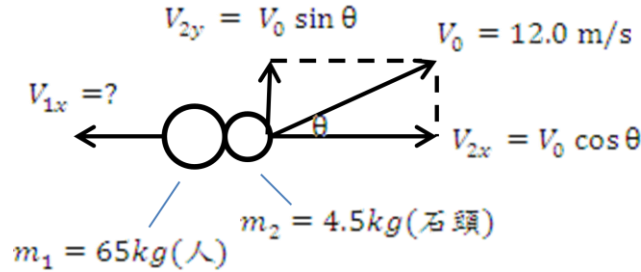
$$\begin{aligned} v_{1f} &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i} \\ &= \frac{m - 4m}{m + 4m} \times (2v) + \frac{2 \times 4m}{m + 4m} \times v = \frac{2}{5} v \end{aligned}$$

$m_2$  的末速度：

$$\begin{aligned} v_{2f} &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i} \\ &= \frac{2m}{5m} \times (2v) + \frac{4m - m}{5m} v = \frac{7}{5} v \end{aligned}$$

25. 質量 65.0 kg 的你靜止站在無摩擦的冰上，以 12.0 m/s 初速率拋出 4.50 kg 的石頭。如果石頭落地時距你 15.2 m，求 (a) 你拋出石頭的角度為何？(b) 拋出後你移動的速度為何？

解：



水平方向動量守恆：

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = 0 \Rightarrow v_{1x} = -\frac{m_2 v_{2x}}{m_1} = -\frac{m_2}{m_1} v_0 \cos \theta$$

估算石頭飛行時間

$$y = v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ or } \frac{2v_0 \sin \theta}{g} \text{ (飛行時間)}$$

(a) 落地時分開的距離

$$d = (v_{2x} - v_{1x}) t$$

$$= \left( v_0 \cos \theta + \frac{m_2}{m_1} v_0 \cos \theta \right) \frac{2v_0 \sin \theta}{g}$$

$$\Rightarrow \sin 2\theta = \frac{gd}{v_0^2 \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)}$$

$$\therefore \theta = \frac{1}{2} \sin^{-1} \left[ \frac{gd}{v_0^2 \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sin^{-1} \left[ \frac{9.8 \times 15.2}{12.0^2 \times \left(1 + \frac{4.50}{65.0}\right)} \right] = 37.7^\circ$$

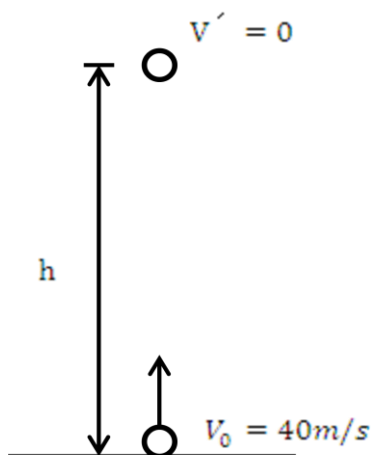
(b) 人移動的速度

$$v_{1x} = -\frac{m_2}{m_1} v_0 \cos \theta$$

$$= -\frac{4.50}{65.0} \times 12.0 \times \cos(37.7^\circ)$$

$$\approx -0.657 \text{ m/s} = -65.7 \text{ cm/s}$$

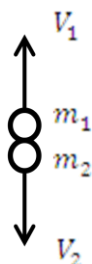
26. 一個煙火以 40 m/s 的速率垂直向上發射，當其到達最高點時，爆炸分成質量相等的兩塊，其中一塊在爆炸後 2.87 s 掉落地面，求第二塊落地的時間。  
解：



力學能守恆：

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mV_0^2 &= mgh \\ \therefore \text{最高點 } h &= \frac{V_0^2}{2g} \\ &= \frac{40^2}{2 \times 9.8} \text{ m} = 81.63 \text{ m} \end{aligned}$$

爆炸：



$$m_1 = m_2 = \frac{m}{2}$$

$$\text{動量守恆: } m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$$

$$\therefore v_1 = -v_2$$

$$\text{令 } v_1 = v, v_2 = -v$$

$$\text{垂直位移 } \Delta y = (\text{垂直初速度}) \times t - \frac{1}{2}gt^2$$

$m_1$  和  $m_2$  落地所需時間分別為  $t_1$  和  $t_2$ ，( $t_1 > t_2$ )

$$-h = vt_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 \text{ --- (1)}$$

$$-h = -vt_2 - \frac{1}{2}gt_2^2 \text{ --- (2)}$$

$$\begin{aligned} &(1) \times t_2 + (2) \times t_1 \\ \Rightarrow t_1 &= \frac{2h}{gt_2} = \frac{2 \times 81.63}{9.8 \times 2.87} \text{ s} = 5.80 \text{ s} \end{aligned}$$



### 題組題

你對於物理與運動的結合感到興趣。你發現到許多的運動比賽牽涉到碰撞，例如球棒與棒球、腳與足球、曲棍球棍與冰球、籃球與地板等。運用閃光攝影術你著手開始做此類碰撞的研究。圖 9.24 是你所拍攝到關於一個球在地板上彈跳的閃光照片，此球從照片左上方的點被拋出後，你的相機紀錄了它與地板做連續三次碰撞的過程。

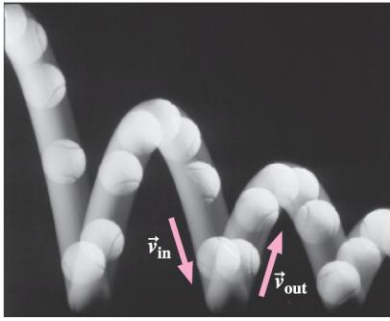


圖9.24 題組題33–35。(照片由 Richard Megna-FUNDAMENTAL PHOTOGRAPHS, NYC / 提供授權)

33. 此球與地板之間的碰撞為

- 完全彈性。
- 完全非彈性。
- 既非完全彈性也非完全非彈性。

解：

(c)，彈跳高度降低有能量損失，故不是(a)。

碰撞後未結合在一起，故不是(b)。

34. 此球與地板做第二次碰撞所損失之機械能的比例

- 大約為 10%。
- 稍微少於一半。
- 稍微大於一半。
- 大約為 90%。

解：

(b)，第二次彈跳的最大高度約比第一次彈跳最大高度的一半多一點。

此高度正比於總機械能，因此剩餘的機械能約為第一次彈跳時的一半強。

35. 與連續兩個碰撞之時間間隔相比較，球與地板碰撞的持續時間為

- a. 連續兩個碰撞之時間間隔的一小部分。
- b. 連續兩個碰撞之時間間隔的一大部分。
- c. 連續兩個碰撞之時間間隔的好幾倍。

解：

(a)，兩次碰撞間約拍 7 個影像，而每次碰撞只有一個影像。